Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt

Online-Algorithmen
Sommersemester 2016
Abgabe: 26.04.2016, 14:00 Uhr

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 — 5 Punkte

Sei A ein Markierungsalgorithmus für einen Cache der Größe k. Wir wollen die durch A verursachten Kosten mit den Kosten eines optimalen Paging-Algorithmus, dem nur ein Cache der Größe $h \leq k$ zur Verfügung steht, vergleichen. Zeigen Sie, dass für eine geeignete Konstante τ

$$w_A(\sigma) \leq \frac{k}{k-h+1} \cdot \mathrm{OPT}_h(\sigma) + \tau$$

für alle Sequenzen σ gilt.

Aufgabe 2.2 — 5 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe den Spezialfall des Paging-Problems, in dem es insgesamt nur $k+1$ viele verschiedene Seiten $0, 1, \ldots, k$ gibt. Wir untersuchen den Online-Algorithmus A, der bei einem Seitenfehler bei einem Zugriff auf Seite i die Seite $(i+1) \bmod (k+1)$ verdrängt.

(a) Handelt es sich bei A um einen Markierungsalgorithmus? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass A k-kompetitiv ist.

Aufgabe 2.3 — 5 Punkte

Betrachtet werde folgendes Listenproblem: Eine Anfragesequenz σ auf Listenelemente, die in einer unsortierten linearen Liste gehalten werden, soll bedient werden. Bei einem Zugriff auf ein Listenelement an i-ter Stelle entstehen Kosten in Höhe von i, die von der Position des Elements in der Liste abhängen. Das angefragte Element kann nach seiner Anfrage an eine beliebige Position weiter vorne in der Liste bewegt werden (*gratis Austausch*), ohne dass dadurch Kosten entstehen. Außerdem ist es mit *bezahlten Austauschen* möglich, nach jeder Anfrage beliebig viele benachbarte Elemente zu vertauschen, wobei für jeden Tausch Kosten 1 entstehen. Der Algorithmus Move-To-Front (MTF) bewegt bei jeder Anfrage das angefragte Element an den Anfang der Liste. Beweisen Sie, dass MTF 2-kompetitiv ist.

Hinweis: Wählen Sie als Potentialfunktion Φ die Anzahl der Inversionen in der Liste, wobei eine Inversion ein geordnetes Paar (x, y) von Listenelementen ist, so dass x vor y in der Liste von OPT und hinter y in der Liste von MTF steht.

Aufgabe 2.4 — 5 Punkte

Wir betrachten erneut das Listenproblem aus Aufgabe 2.3: Beweisen Sie, dass jeder deterministische Online-Algorithmus A für das Listenproblem mindestens 2-kompetitiv ist.