Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2015/16

Abgabe: 10.11.2015, 10:15 Uhr

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

3+2+3 Punkte

Auch wenn wir es nicht explizit erwähnen, so gehört zu einer vollständigen Lösung einer Übungsaufgabe auch immer ein Beweis der aufgestellten Behauptungen. Es genügt also zum Beispiel in Teilaufgabe (a) nicht zu sagen, dass die Abbildung f_λ injektiv ist. Es sollte auch ein Beweis dieser Behauptung angegeben werden. Sagen Sie andererseits, dass die Abbildung f_λ nicht injektiv ist, so sollten Sie dies durch ein Gegenbeispiel belegen.

(a) Geben Sie für die folgenden Abbildungen an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

(I) $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$

(II) $g \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$

(III) $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = xy$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(b) Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ an.

(c) Sei $f \colon M \to N$ eine Abbildung. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} \colon N \to M$ mit $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in M$ und $(f \circ f^{-1})(y) = y$ für alle $y \in N$?

Aufgabe 3.2

3+3 Punkte

(a) Geben Sie die folgenden Aussagen mithilfe von Quantoren wieder.

(I) Für jede reelle Zahl x gilt: Wenn x rational ist, dann auch $\sqrt{x}$.

(II) Jede natürliche Zahl besitzt endlich viele Vorgänger und unendlich viele Nachfolger.

(III) Für manche natürliche Zahlen $n \geq 3$ und ganze Zahlen x, y und z gilt $x^n + y^n = z^n$.

(b) Negieren Sie die Aussagen aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 3.3

3+3 Punkte

(a) Geben Sie für die folgenden Relationen an, welche aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften sie jeweils besitzen.

(I) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $x\,R\,y \iff x = y = 0$ oder $xy > 0$

(II) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $x\,R\,y \iff |x - y| = 1$

(III) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, y_1)\,R\,(x_2, y_2) \iff x_1 y_2 = y_1 x_2$

(b) Beweisen Sie, dass die Relation $\sim$ mit

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : (\mu a = \lambda c) \wedge (\mu b = \lambda d)$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{Z}^2$ ist.

Aufgabe 3.4

2+2+2 Zusatzpunkte

Seien M und N nichtleere Mengen und sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist S eine Äquivalenzrelation auf N, dann ist durch $x\,R\,y \iff f(x)\,S\,f(y)$ eine Äquivalenzrelation R auf M definiert.

(b) Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und ist f bijektiv, dann ist durch

$$y_1\,S\,y_2 \iff \exists\, x_1,\, x_2 \in M\colon y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2) \text{ und } x_1\,R\,x_2$$

eine Äquivalenzrelation S auf N definiert.

(c) An welchen Stellen im Beweis von Aufgabenteil (b) werden die Surjektivität bzw. die Injektivität von f benötigt? Geben Sie für den Fall, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist, und für den Fall, dass f surjektiv, aber nicht injektiv ist, jeweils ein Gegenbeispiel zu der Behauptung aus Aufgabenteil (b) an.