

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Wir betrachten in dieser Aufgabe das Maximum k Cut-Problem: Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Gewichten $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Das Ziel ist es eine Partitionierung $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ zu finden, welche das Gewicht der Kanten mit Endpunkten in verschiedenen Mengen maximiert. Geben Sie einen Approximationsalgorithmus mit Approximationsfaktor $\frac{k-1}{k}$ an und beweisen Sie diesen.

Aufgabe 5.2

Beim Maximum Directed Cut-Problem seien ein Graph $G = (V, E)$ gegeben und jede Kante $e \in E$ habe ein nichtnegatives Gewicht $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gesucht ist ein Schnitt $S \subseteq V$, sodass das Gewicht der ausgehenden Kanten aus S maximiert wird. Geben Sie einen randomisierten Approximationsalgorithmus mit Approximationsfaktor $1/4$ an und beweisen Sie diesen.

Aufgabe 5.3

Wir betrachten folgende Variante des *Coupon Collector Problems*: Jede Cornflakes-Packung enthält einen von $k \cdot n$ verschiedenen Coupons. Die Coupons 1 bis k bilden ein k -Tupel, die Coupons $k + 1$ bis $2k$ bilden ein k -Tupel und so weiter. Sobald man von jedem k -Tupel mindestens einen Coupon besitzt, gewinnt man den ausgeschriebenen Preis. Wie viele Packungen muss man im Erwartungswert kaufen, um den Preis zu gewinnen? Wir nehmen dazu an, dass beim Befüllen jeder einzelnen Packung der Coupon uniform zufällig und unabhängig von den anderen Packungen aus den $k \cdot n$ zur Verfügung stehenden Coupons ausgewählt wurde.

Aufgabe 5.4

In einer Quiz-Show können drei Teilnehmer eine Reise nach Hawaii gewinnen wenn sie das folgende Spiel gewinnen: Jeder Teilnehmer bekommt unabhängig und zufällig entweder einen roten oder einen grünen Hut. Er kann die Farbe seines eigenen Huts nicht sehen, aber die Farbe der anderen Hüte. Ohne untereinander zu kommunizieren muss nun jeder der Kandidaten entweder „rot“, „grün“, oder „Unbekannt“ auf einem Zettel notieren. Die drei Kandidaten gewinnen, wenn mindestens einer der Kandidaten „rot“ oder „grün“ notiert hat und zusätzlich alle Kandidaten, welche eine Farbe notiert haben, die Farbe ihres eigenen Huts notiert haben. Geben Sie eine Strategie an, die eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 50% garantiert. Gibt es eine bessere Strategie?